Duttilità e fattore di struttura

Per avere una analisi realistica di una struttura dovremmo sempre effettuare una analisi dinamica non lineare che, ad oggi, è l'unica che definisce, con un ottimo grado di approssimazione, il reale comportamento di una struttura sotto azioni statiche e dinamiche.

Tuttavia in passato non era possibile eseguire calcoli cosi complessi ed allora, partendo dagli studi del comportamento di sistemi lineari semplici, si cominciarono a definire metodi di calcolo che descrivessero quello di strutture più complesse.

Nacquero quindi le prime analisi dinamiche lineari che descrivevano in maniera opportuna il comportamento di una struttura sottoposta ad azione sismica.

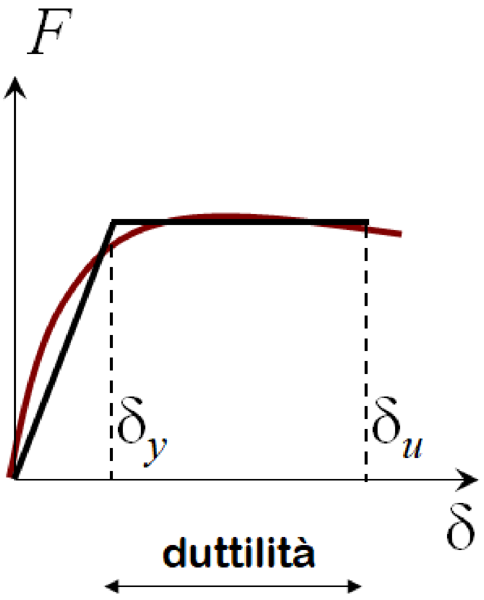
Ma nella pratica non possiamo progettare una struttura affinché rimanga sempre in campo elastico per ogni azione a cui è sottoposta, questo porterebbe alla realizzazione di elementi con sezioni enormi, quindi una struttura antieconomica e sovradimensionata per la maggior parte delle situazioni di carico che andrà ad incontrare nella sua vita nominale.

Inoltre si avrebbe un paradosso poiché aumentando la resistenza della struttura si ridurrebbe il suo periodo proprio e quindi crescerebbe anche l'accelerazione sismica a cui sarebbe sottoposta e le relative sollecitazioni.

Quindi nel tempo sono stati sviluppati diversi metodi al fine di ottimizzare la struttura e le risorse economiche, puntando proprio su quel rapporto che esiste tra la capacità reale della struttura e la resistenza strutturale ottenuta da una analisi lineare definendo un parametro che descriveva la riduzione della forza agente sulla struttura (*fattore di struttura*)

Ma per poter valutare ed applicare questo fattore si sarebbe dovuto aspettare che la ricerca scientifica definisse un altro parametro: la *duttilità*.

Il concetto di *duttilità* nasce proprio dopo le prime analisi non lineari quando, diagrammando i risultati, si definì con questo nome il rapporto tra lo spostamento ultimo della struttura e lo spostamento ad limite di snervamento.



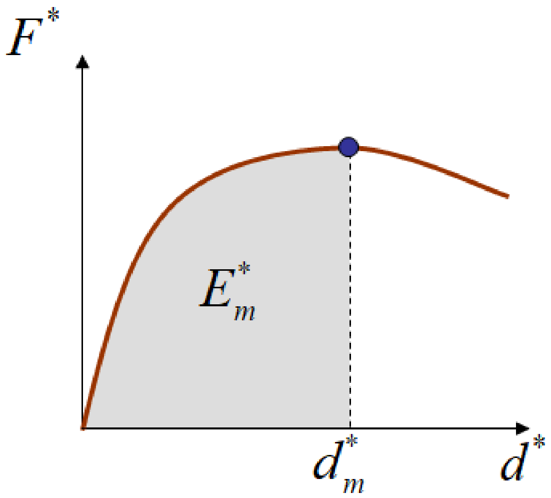
$$\mu = \frac{\delta_u}{\delta_y}$$

Oggi quando progettiamo agli Stati Limite ammettiamo che la struttura possa deformarsi, anche permanentemente, sotto azioni di notevole entità senza che si arrivi al collasso. Ammettiamo, quindi, che rimanga in campo elastico per una quota parte dell'azione sismica, affidando alle sue capacità deformative in campo plastico, quindi alla duttilità, l'onere di sopportare la restante parte.

C'è quindi una sostanziale differenza rispetto a quanto succede all'oscillatore semplice di tipo elastico: la massima forza che dovrà sopportare il nostro edificio sarà più bassa.

Per capire meglio cosa differenzia e cosa lega la duttilità e il fattore di struttura si deve far riferimento al diagramma *Forza/Spostamento* di un sistema ad un grado di libertà (SDOF) in campo non lineare, sottoposto ad una forza crescente (*curva di capacità*).

L'energia assorbita dal sistema è ottenuta dalla integrazione della curva per il tratto che va dall'origine fino a d_m^*, ascissa relativa alla massima forza applicata.

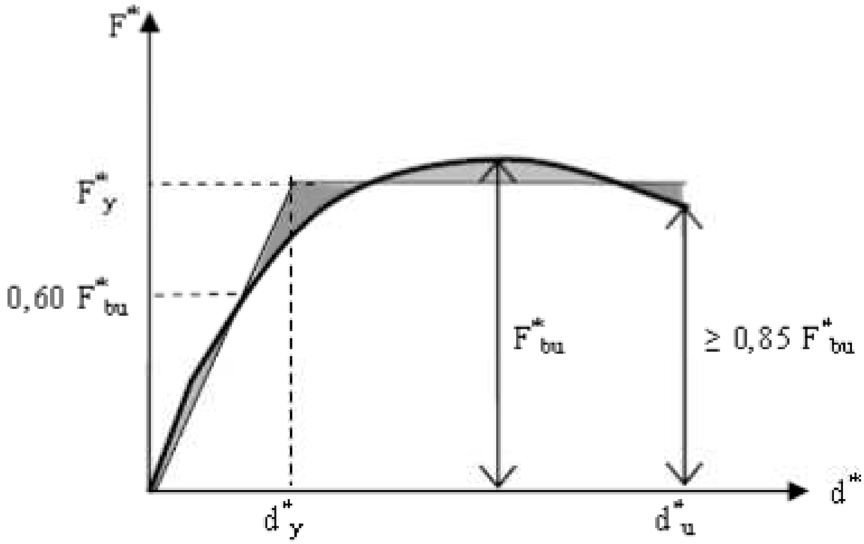


La lettura della curva evidenzia una parte iniziale sostanzialmente retta che ricalca il comportamento di un oscillatore semplice considerato in campo lineare, ma a mano a mano che l'oscillatore entra in campo plastico si avranno degli spostamenti che cresceranno rapidamente a fronte di una forza che invece resta quasi invariata in intensità.

Tuttavia di norma si preferisce lavorare su un diagramma semplificato rappresentativo di un sistema *elastico- perfettamente plastico* ottenuto convertendo la curva di capacità SDOF in curva bilineare di pari energia.

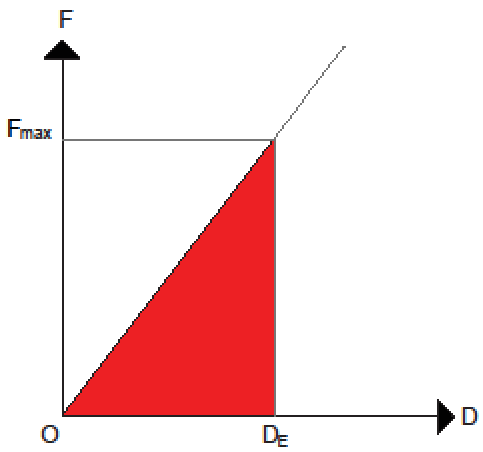
La curva è costituita da un primo tratto lineare che descrive il comportamento elastico del sistema SDOF e da un tratto orizzontale (nell'ipotesi di comportamento perfettamente plastico) che descrive il comportamento post snervamento del sistema.

Per ottenere questa nuova curva semplificata si dovrà dapprima stimare la massima resistenza del sistema $\tilde{F}_{my}\left(D_m\right)=\dfrac{V_{bmy}}{\Gamma_m}=F_{bu}^*$ (1.1) e quindi si potrà ottenere il primo tratto lineare congiungendo l'origine con il punto di intersezione tra la curva ci capacità e una retta di equazione $F^*=0.6\cdot F_{bu}^*$ (1.2), altro punto da stimare sarà quello di massimo spostamento che per le NTC 2008 corrisponde all'ascissa del punto di intersezione tra la curva di capacità e la retta di equazione $F^*=0.85\cdot F_{bu}^*$(1.3). Con semplici considerazioni geometriche si potrà quindi ottenere la curva bilineare da utilizzare per le successive verifiche.



Prendiamo adesso in considerazione il diagramma rappresentativo del comportamento di un sistema SDOF in campo elastico.

In questo caso avremo: F_{max} è la forza massima a cui l'oscillatore è sottoposto, D_E è lo spostamento che subirà in campo elastico in virtù di quella forza, l'area di colore rosso rappresenta l'energia assorbita dal sistema elastico a comportamento lineare.



Tuttavia l'energia elastica E_E immagazzinata dal sistema, cioè il lavoro compiuto in un ciclo completo, è sempre nulla.

Questo è evidente considerando che la forza elastica in un ciclo completo parte e ritorna allo stesso punto in un grafico forza spostamento. In sostanza questa energia smette di esistere quando le azioni che l'hanno generata si annullano.

La forza elastica di richiamo è

$$F_E = Ku \quad (1.4)$$

E l'energia elastica sarà

$$\Delta E_E = \int_{u_1}^{u_2} F_E du = \int_{t_1}^{t_2} F_E \dot{u} dt = \int_0^{2\pi/\Omega} Ku\dot{u}dt \qquad (1.5)$$

In virtù delle soluzioni dell'equazione generale del moto di un sistema sottoposto ad eccitazione armonica si avrà per lo spostamento e la velocità

$$u(t) = u_0 sen(\omega t - \varphi) \qquad \dot{u}(t) = \omega u_0 \cos(\omega t - \varphi) \qquad (1.6)$$

Dove u è lo spostamento, $\dot{u} = \dfrac{du}{dt}$ la velocità, ω la frequenza della forzante, u_0 l'ampiezza della forzante.

Sostituendo si otterrà

$$\begin{aligned}\Delta E_E &= \frac{Ku_0^2\omega}{2}\int_0^{2\pi/\omega} 2sen(\omega t - \varphi)\cos(\omega t - \varphi)dt = \\ &= \frac{Ku_0^2\omega}{2}\int_0^{2\pi/\omega} sen[2(\omega t - \varphi)]dt = \\ &= \frac{Ku_0^2\omega}{2}\left|\frac{1}{2\omega}\cos 2(\omega t - \varphi)\right|_0^{2\pi/\omega} = 0\end{aligned} \qquad (1.7)$$

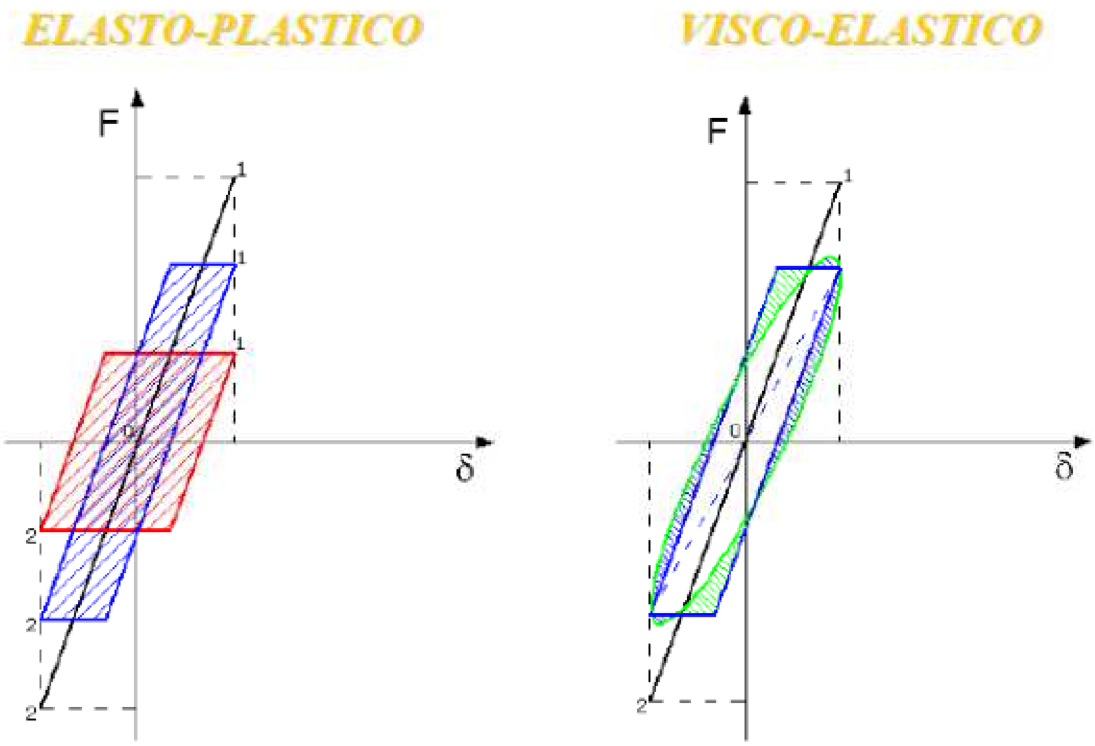
Al contrario il lavoro compiuto dalla forza viscosa non sarà uguale a zero, ma sarà proporzionale alla velocità del sistema.

Pertanto si avrà:

$$F_D = c\dot{u} \tag{1.8}$$

$$\begin{aligned}\Delta E_D &= \int_{u_1}^{u_2} F_D du = \int_{t_1}^{t_2} c\dot{u}^2 dt = c\omega^2 u_0^{\,2} \int_0^{2\pi/\omega} \cos^2\left(\omega t - \varphi\right) dt \\ &= c\omega^2 u_0^{\,2} \left\{ \frac{1}{2} \int_0^{2\pi/\omega} dt + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi/\omega} \cos\left[2\left(\omega t - \varphi\right)\right] dt \right\} = \pi c \omega u_0^{\,2}\end{aligned} \tag{1.9}$$

Di seguito viene rappresentata l'energia dissipata dal sistema in un ciclo considerandolo elastico perfettamente plastico e viscoso.



Essendo quindi la dissipazione proporzionale alla velocità del sistema non potrà essere uguale per tutte le strutture, ma avrà una diversa formulazione in virtù del periodo proprio principale della struttura e quindi della sua velocità di vibrazione. Si dovrà cioè considerare il valore del periodo proprio del sistema non lineare dato da $T_m = \dfrac{2\pi}{\omega_m}$ (1.10) e quindi comparare questo valore con i valori T_B e T_C dello spettro elastico dello stato limite indagato.

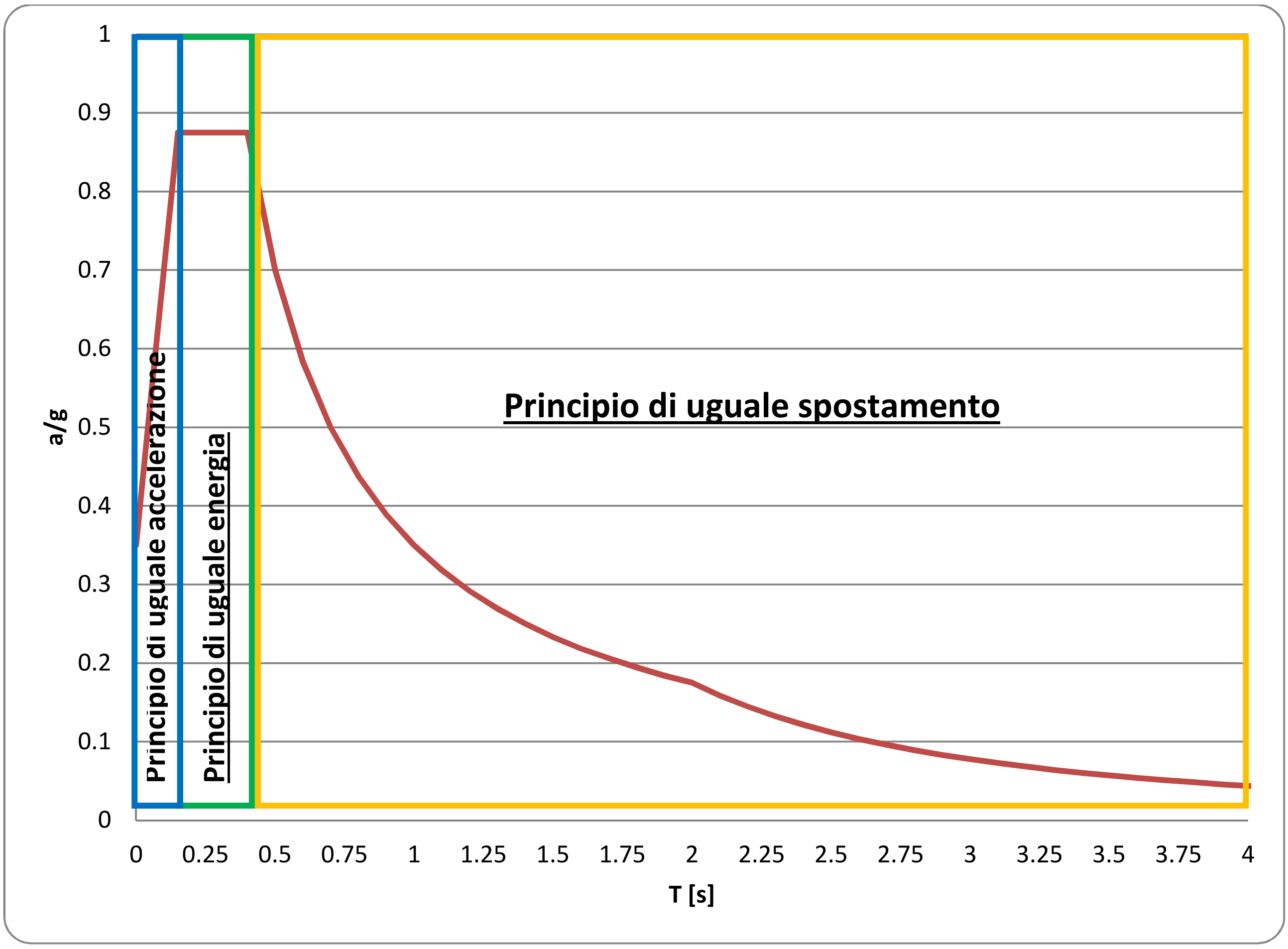
Questi valori definiscono tre zone dello spettro che porteranno a diverse considerazioni sul principio su cui si dovrà basare la scelta dell'equazione per la ricerca del punto di funzionamento.

I principi su cui si basa tale ricerca sono essenzialmente tre:

- *principio di uguale spostamento*
- *principio di uguale energia*
- *principio di uguale accelerazione*

In realtà nessuno dei tre "*principi*" ha effettiva validità assoluta, ma l'esperienza maturata in questi anni ha dato sempre valore a queste tre ipotesi e a tutt'oggi sono le approssimazioni che si adottano più frequentemente in una analisi statica non lineare.

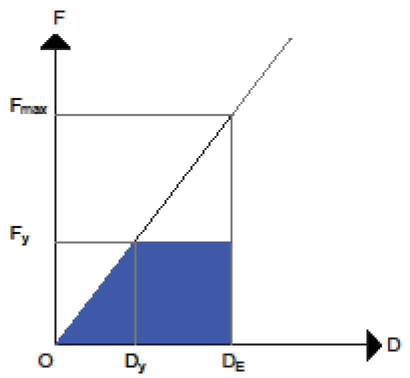
Per capire meglio quale principio sarà più opportuno adottare si deve far riferimento ad uno spettro di risposta elastico qui riportato a solo titolo qualitativo e non quantitativo:



A seguito di numerose prove sperimentali è stato evidenziato che, per oscillatori semplici a comportamento isteretico *elasto-plastico perfetto* e periodo proprio che supera l'accelerazione massima di spettro (> T_C), gli spostamenti massimi del sistema reale D (quindi in campo non lineare) raggiungono gli stessi valori di quanto previsto per un sistema perfettamente elastico D_e, avente una rigidezza iniziale pari a quella del sistema inelastico.

In questa condizione la duttilità richiesta $\mu = \frac{D}{D_y}$ (1.11) sarà pari al fattore di riduzione delle forze $R = \frac{F_{\max}}{F_y} = q$ (1.12), cioè si avrà

$$\mu = R \tag{1.13}$$



Questo principio prende il nome di "*principio di uguale spostamento*" e, come detto, è valido per strutture che presentano un periodo proprio in campo anelastico $T^* = T_m = \frac{2\pi}{\omega_m}$ (1.14) che supera il valore T_C dello spettro elastico di progetto.

La domanda in spostamento del sistema anelastico è assunta in questo caso pari a quella di un sistema elastico perfettamente plastico e sarà quindi pari a:

$$d^*_{\max} = d^*_{e,\max} = S_{De}\left(T^*\right) \tag{1.15}$$

E' questo il principio da utilizzare per strutture ordinarie in cemento armato, costituite da una intelaiatura spaziale dove non sono presenti setti di grande rigidezza, per definire il punto di funzionamento e quindi il coefficiente *R* di riduzione delle forze.

In questo caso perciò la duttilità **coincide** con il *fattore di struttura* o *fattore di riduzione delle forze*.

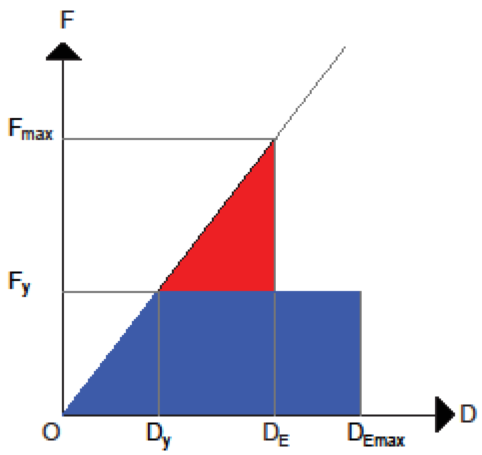
Nel caso di strutture con periodo proprio minore di T_C l'equazione precedente non è più conservativa perché la richiesta di duttilità sarà maggiore del fattore di riduzione delle forze.

In questo caso si ricorre all'ipotesi di uguale energia. Questa ipotesi prevede che l'energia assorbita dal sistema elastico sia la stessa di quella assorbita dal sistema anelastico ed è rappresentata dall'area sottesa alla retta che rappresenta il grafico della curva forza-spostamento per il sistema perfettamente lineare (di forma triangolare) e dalla curva bilineare per il sistema anelastico (trapezio rettangolo).

Da questa caratteristica deriva il nome di *principio di uguale energia*.

Da considerazioni di carattere geometrico si potrà definire pertanto la **relazione** che intercorre tra il *fattore di riduzione delle forze* e la *duttilità* richiesta

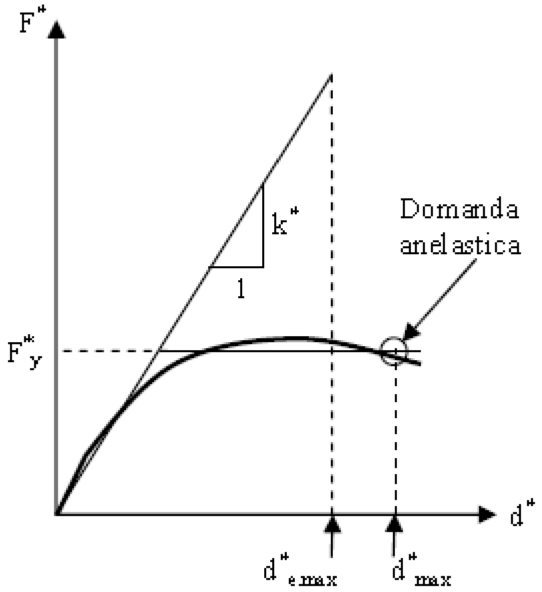
$$\mu = \frac{R^2 + 1}{2} \tag{1.16}$$



In questo caso si dovrà calcolare lo spostamento massimo in accordo con la C7.3.8 delle NTC 2008, qui riportata:

$$d^*_{\max} = \frac{d^*_{e,\max}}{q^*}\left[1 + \left(q^* - 1\right)\frac{T_C}{T^*}\right] \geq d^*_{e,\max} \tag{1.17}$$

Ove $q^* = \dfrac{S_e\left(T^*\right)m^*}{F_y^*} = R$ (1.18)



Per sistemi il cui periodo è molto breve (inferiore di T_B) neanche la (1.17) è più conservativa; infatti quando $q^* < 1$ i valori che si ottengono sono tutti inferiori di $d^*_{e,\max}$.

Questo deriva dalla tendenza del periodo proprio, T_e, di allungarsi verso regioni ad accelerazione spettrale maggiore, a seguito del degrado di rigidezza della struttura in campo plastico.

Tendendo alla condizione limite *T=0*, perfino a piccoli fattori di riduzione delle forze corrispondono duttilità elevate, perché le deformazioni strutturali diventano insignificanti rispetto alle deformazioni del terreno e la struttura sarà sottoposta alle effettive accelerazioni del terreno indipendentemente dagli spostamenti relativi e quindi dalla duttilità.

Se la struttura non fosse in grado di sopportare il picco di accelerazione del terreno, collasserebbe.

Quindi per strutture con periodi propri molto piccoli dovranno essere previste azioni non inferiori a quelle corrispondenti al picco di accelerazione del terreno.

Questo comportamento viene indicato come *principio di uguale accelerazione*.

In questo caso le NTC 2008 definiscono una richiesta di spostamento massimo pari a quanto previsto dalla (1.15) , tuttavia, per quanto sopra detto, sarebbe opportuno considerare una domanda di spostamento pari a:

$$d^*_{\max} = S_{De}\left(T_B\right) \qquad (1.19)$$

ove $S_{De}\left(T_B\right)$ è lo spostamento corrispondente al valore di picco della accelerazione nel punto T_B e calcolato mediante la seguente relazione:

$$S_{De}\left(T_B\right) = S_e\left(T_B\right) \cdot \left(\frac{T_B}{2\pi}\right)^2 \qquad (1.20)$$

I principi di *uguale energia* e di *uguale accelerazione* sono applicabili molto raramente per strutture ordinarie in c.a. E' invece più frequente il loro utilizzo in edifici in muratura dove il periodo proprio è di solito piuttosto ridotto o dove addirittura non si raggiunge mai la fase plastica a seguito delle accelerazioni previste nel sito.

Questo è abbastanza frequente per edifici con murature di buono spessore e consistenza, su edifici bassi e di modeste dimensioni e che quindi, a fronte di una elevata rigidezza globale, presentano delle masse ridotte.

Da quanto detto si spiega inoltre il perché le norme tecniche propongano differenti fattori di struttura in ragione della tipologia costruttiva e del numero di cerniere plastiche potenzialmente attivabili.